

2

Zastosowanie systemów liczbowych w technice komputerowej

EFEKTY KSZTAŁCENIA Z PODSTAWY PROGRAMOWEJ:

- E.12.1(1) stosuje systemy liczbowe używane w technice komputerowej.

W TYM ROZDZIALE:

- przypomnisz sobie zasadę zapisu liczb w systemie pozycyjnym;
- utrwalisz wiedzę dotyczącą podstawowych systemów liczbowych;
- poznasz praktyczne zastosowania systemów liczbowych w informatyce;
- sprawdzisz umiejętność wykonywania działań na systemach liczbowych.

Wprowadzenie

ZAPAMIĘTAJ

Systemem liczbowym nazywamy sposób zapisywania liczb oraz zbiór reguł umożliwiających wykonywanie działań na tych liczbach.

W informatyce powszechnie stosowane są systemy liczbowe, które bazują na pozycyjnym sposobie zapisu liczb. System pozycyjny to metoda zapisywania liczb polegająca na tym, że w zależności od pozycji danej cyfry w ciągu oznacza ona wielokrotność potęgi liczby uznawanej za podstawę danego systemu liczbowego. Liczby zapisujemy przy użyciu cyfr od strony lewej do prawej. W takim systemie zapisu każda pozycja ma ściśle określoną i niezmienną wagę liczbową, która jest równa podstawie podniesionej do potęgi o wartości numeru pozycji. Wartość liczby uzyskujemy po zsumowaniu poszczególnych iloczynów wag i cyfr pozycji.

Do najbardziej popularnych i najczęściej stosowanych w informatyce pozycyjnych systemów liczbowych zaliczamy:

- system dziesiętny (decymalny),
- system dwójkowy (binarny),
- system szesnastkowy (heksadecymalny),
- system ósemkowy (oktalny).

Tabela 2.1. Przykłady zapisu liczby 10 w różnych systemach liczbowych

System dziesiętny	$10_{(10)}$ lub 10_D
System dwójkowy	$1010_{(2)}$ lub 1010_B
System szesnastkowy	$A_{(16)}$ lub A_H
System ósemkowy	$12_{(8)}$ lub 12_O

UWAGA

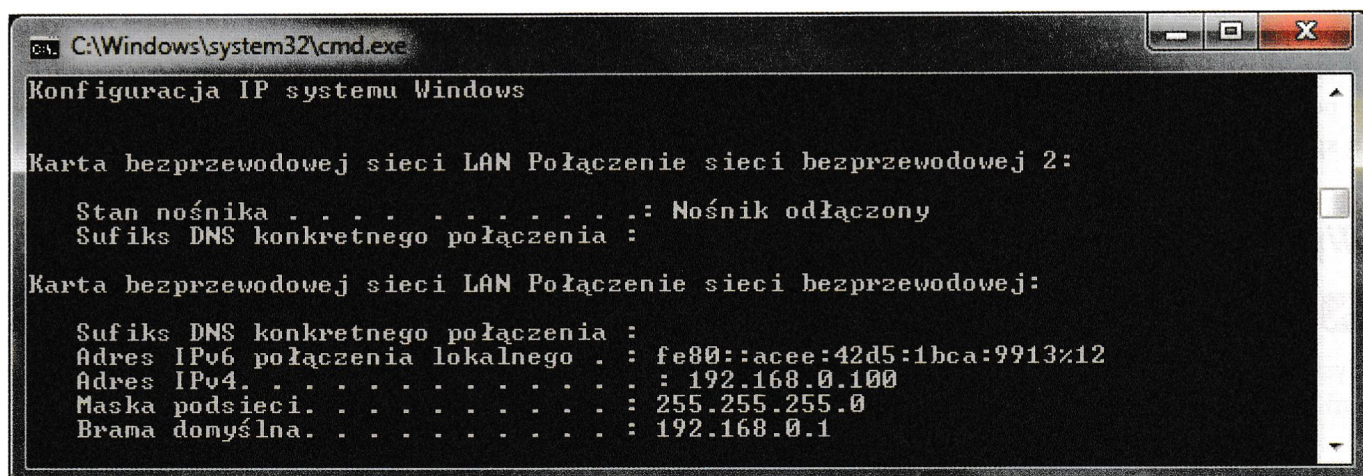
Liczba w nawiasie lub litera w indeksie dolnym oznacza nazwę systemu i określa podstawę systemu pozycyjnego.

Kluczowym systemem wykorzystanym w różnych płaszczyznach technologii teleinformatycznych w warstwie zarówno sprzętowej, jak i programowej jest system binarny. Wszystkie cyfrowe urządzenia elektroniczne wykorzystują binarny system liczbowy, gdzie podstawą jest liczba 2, a liczby zapisuje się za pomocą dwóch cyfr arabskich: 0 lub 1. Stosowanie tylko dwóch cyfr ułatwia budowanie układów półprzewodnikowych, gdzie w uproszczeniu 1 oznacza przepływ prądu o wysokim napięciu [*high*], a 0 niski poziom napięcia [*low*].

Liczby w systemie dwójkowym możemy również zapisać ze znakiem oraz w reprezentacji stało- i zmiennie-przecinkowej.¹

Przykłady zastosowania systemów liczbowych w technice komputerowej

Przykładem praktycznego zastosowania systemów liczbowych jest struktura adresacji w sieciach teleinformatycznych (IPv4 – dwójkowy, IPv6 – szesnastkowy). Karty sieciowe posiadają natomiast 48-bitowy unikatowy adres sprzętowy zapisany w systemie szesnastkowym. Szesnastkowy system liczbowy stosuje się również w przypadku programowania niskopoziomowego i sterowania elementami sprzętu komputerowego. System ósemkowy ma praktyczne zastosowanie w konfiguracji atrybutów plików i katalogów za pomocą polecenia `chmod`.



Rys. 2.1. Przykład zastosowania systemów liczbowych w adresacji sieciowej

Kluczowe dla opanowania umiejętności stosowania systemów liczbowych jest rozróżnianie liczb zapisanych w różnych systemach, przeliczanie systemów liczbowych, wykonywanie operacji arytmetycznych na liczbach binarnych oraz zrozumienie funkcji logicznych realizowanych w prostych układach cyfrowych.

Przykłady działań na systemach liczbowych²

Przeliczanie systemów liczbowych polega na dokonaniu konwersji zapisu liczby z jednego systemu liczbowego na drugi. Do najczęściej stosowanych konwersji zaliczamy:

- konwersja liczb z zapisu w systemie binarnym na system decymalny,
- konwersja liczb z zapisu w systemie decymalnym na binarny,
- konwersja liczb z zapisu w systemie binarnym na system heksadecymalny,
- konwersja liczb z zapisu w systemie heksadecymalnym na system binarny,
- konwersja liczb z zapisu w systemie oktalnym na system binarny

oraz inne, o których znajdziecie informacje w podanych źródłach książkowych. Poniżej przypomnimy niektóre zasady przeliczania systemów liczbowych.

PRZYKŁAD

Przykład konwersji liczb z zapisu w systemie binarnym na system decymalny

$$10011_{(2)} = ?_{(10)}$$

Na początku analizujemy zapis pozycyjny liczby w systemie dwójkowym zgodnie z rysunkiem. Następnie należy każdą cyfrę przemnożyć przez wagę otrzymaną z podstawy podniesionej do potęgi równej pozycji, poczynając od prawej strony. Po przemnożeniu cyfr przez wagi należy je zsumować.

$$10011_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19_{(10)}$$

ZAPAMIĘTAJ

Podobny schemat stosuje się, zamieniając liczby zapisane w innych systemach na system dziesiętny. Inne mogą być tylko cyfry na określonych pozycjach zapisu liczby oraz inna podstawa podnoszona do kolejnej potęgi.

¹ T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy, część 1, rozdział 18*, WSiP, Warszawa 2013.

² T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy, część 1, rozdziały 13–16*, WSiP, Warszawa 2013.



Rys. 2.2. Zapis pozycyjny liczby binarnej

PRZYKŁAD**Przykład konwersji liczb z zapisu w systemie decymalnym na system binarny**

$$256_{(10)} = ?_{(2)}$$

To proste! Musisz podaną liczbę podzielić przez podstawę systemu binarnego, czyli drugim sposobem pisemnym. Jeżeli z dzielenia pozostanie jedynek jako reszta, zapisujemy ją w słupku. Jeżeli reszty nie będzie, wpisujemy 0. Kontynuujemy dzielenie, aż wynikiem dzielenia będzie zero. Zapis słupkowy cyfr reszty z dzielenia, czytany od dołu określi zapis liczby w systemie binarnym.

256 : 2	0
128 : 2	0
64 : 2	0
32 : 2	0
16 : 2	0
8 : 2	0
4 : 2	0
2 : 2	0
1 : 2	1
0	

$100000000_{(2)}$

Rys. 2.3. Konwersja zapisu liczby decymalnej na system binarny

🔑 ZAPAMIĘTAJ

W podobny sposób wykonuje się konwersję liczby zapisanej w systemie dziesiętnym na inne systemy liczbowe. Zmienia się tylko dzielnik, który jest zawsze równy liczbie będącej podstawą systemu docelowego.

PRZYKŁAD**Przykład konwersji liczb z zapisu w systemie binarnym na system heksadecymalny**

$$10110001_{(2)} = ?_{(16)}$$

Konwersję liczby binarnej na postać szesnastkową rozpoczynamy od pogrupowania ciągu na czterobitowe słowa. Pomocna będzie zawartość tabeli 2.2. Grupowanie rozpoczynamy od prawej strony, aż do uzyskania końca zapisu liczby. Jeżeli ostatnie cyfry w pogrupowanym zapisie mają mniej niż cztery znaki, należy uzupełnić puste pozycje zerami. Konwersja z liczby szesnastkowej na binarną polega na odszukaniu w tabeli 2.2 cyfry z systemu szesnastkowego i zamianie jej na czterobitowy zapis. Wynik konwersji należy zapisywać od strony lewej.

Tabela 2.2. Porównanie zapisu cyfr systemów: szesnastkowego i binarnego

Cyfra szesnastkowa	Zapis binarny	Cyfra szesnastkowa	Zapis binarny
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

10110001

↓

B

↓

1

10110001₍₂₎ = B1₍₁₆₎

Rys. 2.4. Konwersja zapisu liczby binarnej na system heksadecymalny

Operacje na liczbach binarnych oraz metody ich zapisu³

Do podstawowych operacji na liczbach binarnych zaliczamy:

- dodawanie liczb binarnych,
- odejmowanie liczb binarnych,
- mnożenie liczb binarnych,
- dzielenie liczb binarnych.

Dodatkowo liczby binarne można zapisać jako:

- liczbę binarną ze znakiem,
- liczbę binarną stało- i zmiennoprzecinkową.

Szczegółowy opis wymienionych metod i operacji przedstawiono w podanych źródłach książkowych. Poniżej przypomnimy zasady dodawania liczb binarnych.

PRZYKŁAD

Przykład dodawania liczb binarnych

Żeby poprawnie wykonać dodawanie liczb binarnych, trzeba znać zasady sumowania poszczególnych cyfr w systemie binarnym. Zasady te przedstawiono w tabeli 2.3.

Tabela 2.3. Zasady sumowania cyfr systemu binarnego

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 0
i 1 do przeniesienia

³ T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy, część 1*, rozdział 17, WSiP, Warszawa 2013.

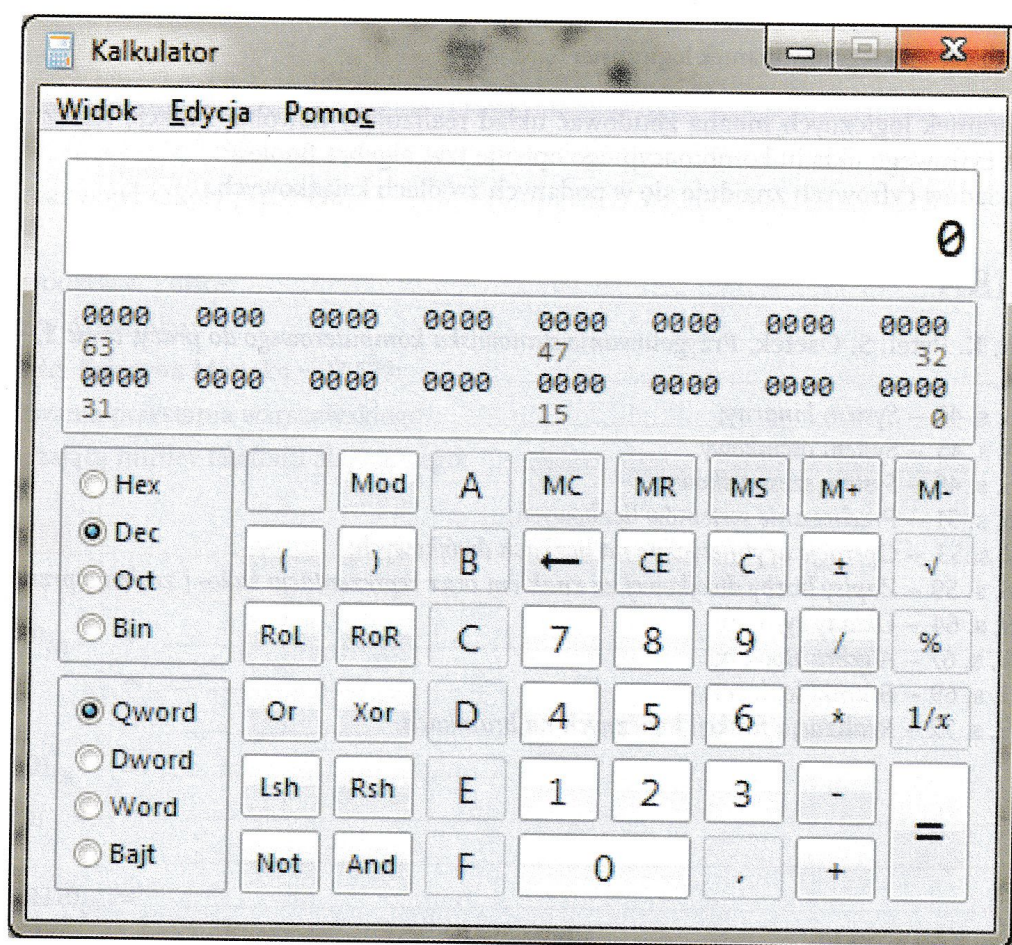
Zasady podstawowej arytmetyki określają wyniki sumowania w trzech pierwszych wierszach tabeli. W czwartym wyniku jest cyfra 2, która w systemie binarnym jest zapisywana jako 10, w związku z tym 0 pozostaje w kolumnie, natomiast 1 jest przenoszona do następnej kolumny.

PRZYKŁAD

$$\begin{array}{rrcr} & 1 & 0 & 0_{(2)} \\ + & 1 & 1 & 0_{(2)} \\ \hline = & 1 & 0 & 1_{(2)} \end{array}$$

Porada!

Nie musisz zawsze wykonywać działań na systemach liczbowych ręcznie. Możesz wykorzystać do tego celu aplikację kalkulator, przełączając na widok programisty.



Rys. 2.5. Okno programu kalkulator

Działania na bramkach logicznych⁴

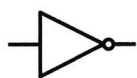
 ZAPAMIĘTAJ

Bramka logiczna to element realizujący pewną funkcję logiczną. Algorytmy funkcji i sama funkcja mogą przyjmować jedną z dwóch wartości: 0 lub 1.

Do opisu działania bramek logicznych stosuje się tablice prawdy.

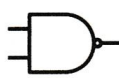
⁴ T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy, część 1, rozdział 21*, WSiP, Warszawa 2013.

INWENTOR – NOT



TABLICA PRAWDY	
we	wyj
0	1
1	0

NAND



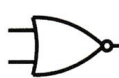
A	B	Wyj
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

AND



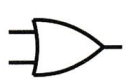
A	B	Wyj
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

NOR



A	B	Wyj
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

OR



A	B	Wyj
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXOR



A	B	Wyj
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rys. 2.6. Tablice prawdy i piktogramy bramek logicznych

Za pomocą bramek logicznych można zbudować układ realizujący dowolną funkcję logiczną. Teoretyczny model działania cyfrowego układu kombinacyjnego opisuje tzw. algebra Boole'a⁵.

Opis teorii układów cyfrowych znajduje się w podanych źródłach książkowych.

LITERATURA

- T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy, część 1*, WSiP, Warszawa 2013:
 - rozdział 13, s. 42 – System binarny;
 - rozdział 14, s. 45 – System ósemkowy;
 - rozdział 15, s. 48 – System szesnastkowy;
 - rozdział 16, s. 51 – Przeliczanie systemów liczbowych;
 - rozdział 17, s. 53 – Operacje arytmetyczne na liczbach dwójkowych;
 - rozdział 18, s. 59 – Zapisy liczby dwójkowej ze znakiem oraz reprezentacja stało- i zmiennoprzecinkowa;
 - rozdział 19, s. 64 – Układy cyfrowe;
 - rozdział 20, s. 67 – Algebra Boole'a;
 - rozdział 21, s. 69 – Bramki logiczne;
 - rozdział 22, s. 72 – Realizacja funkcji logicznych na bramkach.

⁵ T. Marciniuk, K. Pytel, S. Osetek, *Przygotowanie stanowiska komputerowego do pracy. Część 1, rozdział 20*, WSiP, Warszawa 2013.

SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

ZADANIE 1.

Adres fizyczny karty sieciowej 00-1C-C0-28-9D-25 jest zapisany w systemie heksadecymalnym. Dostawca internetu prosił, żeby przesłać zapis tego adresu w formie decymalnej. Zmień zapis, a tok obliczeń przedstaw poniżej.

ZADANIE 2.

Zamień na zapis w systemie binarnym, zapisując tok obliczeń.

- a) rok powstania twojej szkoły (np. 1956):

- b) twój wzrost:

- c) liczbę województw w Polsce:

- d) twój numer w dzienniku:

- e) liczbę ludności Księstwa Monako – 37 579:

- f) liczbę dni trwania powstania warszawskiego:

- g) liczbę oznaczającą numer telefonu alarmowego:

ZADANIE 3.

Zamień na zapis w systemie dziesiętnym, zapisując tok obliczeń.

- a) $100120100001_{(2)}$ =

- b) $10012_{(2)}$ =

- c) $1111011101_{(2)}$ =

- d) $1010101010101_{(2)}$ =

- e) $1000000001_{(2)}$ =

- f) $111111111_{(2)}$ =

- g) $101000010101110_{(2)}$ =

ZADANIE 4.

Zamień na zapis w systemie dwójkowym, zapisując tok obliczeń.

- a) $F1F_{(16)}$ =

- b) $F16_{(16)}$ =

- c) $FCB_{(16)}$ =

- d) $ABBA_{(16)}$ =

- e) $CBA_{(16)}$ =

- f) $CA8_{(16)}$ =

- g) $10F_{(16)}$ =

- h) $12001_{(16)}$ =

SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

ZADANIE 5.

Zamień na zapis w systemie szesnastkowym, zapisując tok obliczeń.

- a) $111000010001010001001_{(2)}$ = _____
- b) $111011111110001010001001_{(2)}$ = _____
- c) $110000001000011111010001001_{(2)}$ = _____
- d) $11101111110001010001001_{(2)}$ = _____
- e) $111000000000000000111111111_{(2)}$ = _____
- f) $11111111111110001010001001_{(2)}$ = _____
- g) $1110001110001110001110001_{(2)}$ = _____

ZADANIE 6.

Zamień na zapis w systemie szesnastkowym, zapisując tok obliczeń.

- a) $111_{(8)}$ = _____
- b) $222_{(8)}$ = _____
- c) $234_{(8)}$ = _____
- d) $737_{(8)}$ = _____
- e) $521_{(8)}$ = _____
- f) $333_{(8)}$ = _____
- g) $212_{(8)}$ = _____

ZADANIE 7.

Zamień na zapis w systemie dziesiętnym, zapisując tok obliczeń.

- a) $18_{(8)}$ = _____
- b) $1111_{(8)}$ = _____
- c) $1003_{(8)}$ = _____
- d) $11A_{(16)}$ = _____
- e) $3211_{(16)}$ = _____
- f) $1111_{(16)}$ = _____
- g) $AAB_{(16)}$ = _____

ZADANIE 8.

Wykonaj działania na liczbach binarnych.

- a) $100101_{(2)} + 10111_{(2)}$ = _____
- b) $11111_{(2)} + 10001_{(2)}$ = _____
- c) $10101011_{(2)} + 11111_{(2)}$ = _____
- d) $110111_{(2)} - 111_{(2)}$ = _____
- e) $101010100_{(2)} - 10010_{(2)}$ = _____
- f) $111111_{(2)} - 111_{(2)}$ = _____
- g) $10111_{(2)} * 11_{(2)}$ = _____

ZADANIE 9.

Dokonaj konwersji liczby w zapisie dziesiętnym na stałopozycyjną dwójkową.

- a) $7,125_{(10)}$ = _____
- b) $2,25_{(10)}$ = _____
- c) $5,5_{(10)}$ = _____

SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

ZADANIE 10.

Zapisz w systemie uzupełnień do 2 (U2).

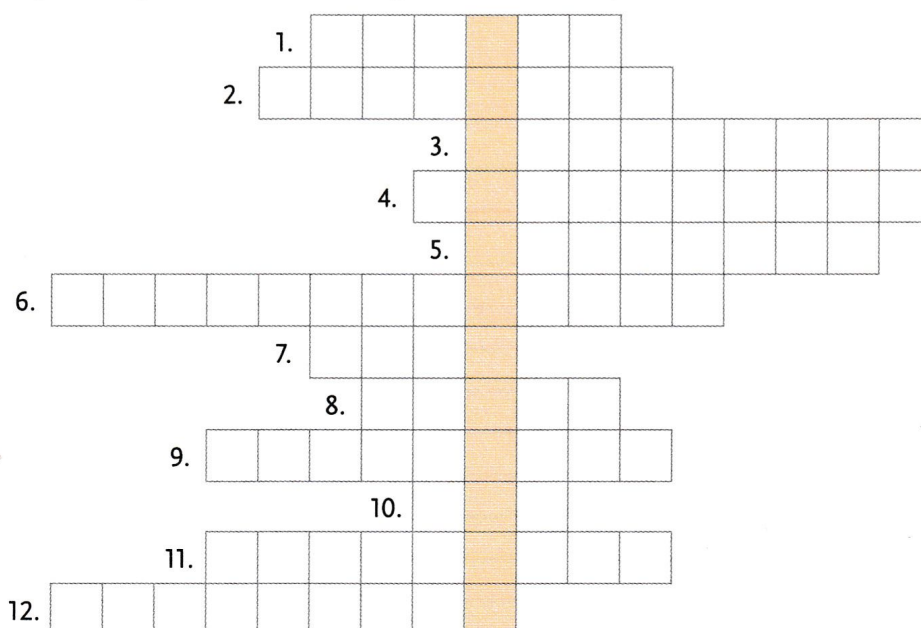
- a) $-13_{(10)} =$
- b) $-99_{(10)} =$
- c) $-199_{(10)} =$

ZADANIE 11.

Narysuj układ bramek logicznych NAND, który może zastąpić bramkę NOR.

KRZYŻÓWKA

Rozwiąż krzyżówkę. Rozwiązanie wraz z hasłem przedstaw do oceny.



1. Jedna z trzech metod zapisu to znak
2. W tym systemie do zapisu liczb używa się cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
3. Jedno z trzech praw logiki algebry Boole'a.
4. Za jego pomocą sprawdzamy poprawność naszych wyników.
5. System, którego używa się w elektronice cyfrowej.

SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

6. Reprezentacja stałoprzecinkowa.
7. Najmniejsze jednostki danych.
8. Są podstawą każdego systemu przeliczeniowego.
9. Przeliczanie.
10. Bramka, która realizuje operacje negacji logicznej.
11. Funkcja, matematyczny model opisu cyfrowego układu kombinacyjnego.
12. Podstawą tego systemu jest liczba 10.

HASŁO:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

KARTA PRACY 1.

Przechwycono transmisję danych obcego wywiadu w postaci ciągu zer i jedynek. Pracownikom biura kryptografii udało się ustalić, że każdy znak zapisano za pomocą słów 8-bitowych. Utworzono również tabelę częściowo rozszyfrowanego alfabetu, ale w zapisie dziesiętnym. Mając te wszystkie informacje, rozszyfruj treść wiadomości.

kod	litera	kod	litera	kod	litera	kod	litera	kod	litera
111	A	6	F	12	K	28	P	77	W
2	B	9	G	13	L	16	R	88	Z
14	C	10	H	11	M	17	S	70	Ż
4	D	7	I	128	N	55	T	29	Ź
5	E	8	J	33	O	62	U	31	Y

Zaszyfrowana treść wiadomości:

```
0000001000010000011011110000101100001100000000111000011010010000100001001000001110000111001011000100
0000000000101
```

Odszyfrowana treść wiadomości:

NOTATKI

